УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

На правах рукописи

Быков

БЫКОВ Данил Сергеевич

ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

01.01.02 дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург — 2012

Работа выполнена на кафедре механики и математического моделирования Уральского федерального университета имени первого Президента России Б.Н.Ельцина.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Долгий Юрий Филиппович.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук Гусев Михаил Иванович, доктор физико-математических наук, профессор Пименов Владимир Германович.
Ведущая организация:	ГОУ ВПО "Удмуртский государственный университет".

Защита состоится "19" ноября 2012 года в $14^{\underline{00}}$ час. на заседании специализированного совета Д 004.006.01 по защите диссертаций на соискание ученой степени ~~доктора~~ наук при Институте математики и механики Уральского отделения РАН (620990, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики и механики УрО РАН.

Автореферат разослан "16" октября 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук Н.Ю. Лукоянов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Интерес к дифференциальным уравнениям с последействием стимулируется проблемами математического моделирования в различных областях естествознания. Основные положения теории этих уравнений изложены в монографиях Н.В. Азбелева, В.П. Максимова и Л.Ф. Рахматуллиной, Р. Беллмана и К.Л. Кука, В.Б. Колмановского и В.Р. Носова, Н.Н. Красовского, А.Д. Мышкиса, Дж. Хейла, Л.Э. Эльсгольца и С.Б. Норкина. В теории устойчивости дифференциальных уравнений с последействием имеются различные направления. Соответствующая библиография весьма обширна. Первый метод Ляпунова развивался в работах Р. Беллмана, К.Л. Кука, А. Халаная, Дж. Хейла, С.Н. Шиманова. Второй метод Ляпунова получил развитие в работах Н.Н. Красовского, В.Б. Колмановского, В.Р. Носова, Ю.С. Осипова, Б.С. Разумихина, Д.Я. Хусаинова, С.Н. Шиманова. Устойчивость по отношению к постоянно действующим возмущениям изучалась в работах Н.В. Азбелева, Л.М. Березанского, А.И. Домошницкого, В.В. Малыгиной, П.М. Симонова.

Теория стабилизации дифференциальных уравнений с последействием имеет важное прикладное значение. В рамках этой теории развивались различные направления. Соответствующая библиография весьма обширна. Возможность стабилизации динамической системы тесно связана с ее управляемостью. Условия управляемости систем дифференциальных уравнений с последействием изучалась в работах А.Г. Габелая, В.М. Марченко, Ф.М. Кирилловой, С.Н. Поповой, Е.Л. Тонкова. Для систем дифференциальных уравнений с последействием различные методы стабилизации предлагались в работах В.М. Марченко, Б.П. Лямпе, С.В. Павликова, А.В. Кима, В.Г. Пименова, С.И. Солодушкина, Б.Г. Гребенщикова, А.Б. Ложникова, Н.Н. Когана, O.H. Kwon, J.H. Park.

Н.Н. Красовский определил достаточные условия существования оптимального стабилизирующего управления[1]. Ю.С. Осипов установил их связь с вполне управляемостью специальной конечномерной системы[2].

Постановка задачи оптимальной стабилизации в функциональном пространстве состояний, предложенная Н.Н. Красовским[3], позволила решать задачи оптимальной стабилизации для дифференциальных уравнений в частных производных (M. Kroller, K. Kunisch, A. Pazy), стохастиче-

[1]Красовский Н.Н. Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздываниями времени // Прикл. матем. и механ. 1962. Т. 26. С. 39 51.

[2]Осипов Ю.С. О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 5. С. 605 618.

[3]Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз. 1959. 212 с.

ских дифференциальных уравнений (Е.А. Андреева, В.Б. Колмановский, Т.Л. Майзенберг) и дифференциальных уравнений в банаховом пространстве (К. Кордунеану, R. Datko, J.S. Gibson), а также задачи оптимального управления системой с последействием на конечном отрезке времени (А.Т. Барабанов, В.Б. Колмановский, K. Ito, F. Kappel, G. Propst, R. Teglas, D. Salamon).

Линейно-квадратичная задача оптимальной стабилизации системы с последействием сводится к нахождению решения алгебраического уравнения Риккати в функциональном пространстве состояний. Теоретические и вычислительные трудности проблемы построения решения алгебраического уравнения Риккати в функциональном пространстве состояний пытались преодолеть, переходя к конечномерным аппроксимациям задачи оптимальной стабилизации (M.C. Delfour[4], J.S. Gibson[5,6], R. Datko[7]), в основе которых лежит замена дифференциального уравнения с неограниченным инфинитезимальным оператором дифференциальными уравнениями с конечномерными инфинитезимальными операторами в функциональном пространстве состояний. В настоящей работе рассматриваются каноническая и усредняющая схемы аппроксимации.

Каноническая схема аппроксимации для систем с последействием изучалась Дж. Хейлом[8], С.Н. Шимановым[9]. Приложению ее к задаче оптимальной стабилизации систем с последействием посвящены работы Н.Н. Красовского, Е.М. Маркушина, Ю.С. Осипова. Построение канонической аппроксимации для системы дифференциальных уравнений с последействием требует нахождения корней характеристического уравнения. Последняя задача недостаточно изучена и является предметом исследования в первой главе. В диссертации дается аппроксимационное решение последней проблемы, использующее теорию характеристических определителей и определителей возмущения, изложенную в монографии И.Ц. Гохберга и М.Г. Крейна[10]. Предложены методы нахождения аппроксимирующих

[4]Delfour M.C. The linear quadratic optimal control problem for hereditary differential systems: Theory and numerical solution // SIAM J. Appl. Mathematics and Optim. 1977. V. 3. № 2. P. 101–162.

[5]Gibson J.S. The Riccati Integral Equations for Optimal Control Problems on Hilbert Spaces // SIAM J. Control and Optim. 1979. V. 17. №. 4. P. 537–565.

[6]Gibson J.S. Linear-quadratic optimal control of hereditary differential systems: infinite dimensional Riccati equations and numerical approximations // SIAM J. Control and Optim. 1983. V. 21. №. 1. P. 95–139.

[7]Datko R. A Linear Control Problem in Abstract Hilbert Space // J. Differential Equations. 1971. V. 9. P. 346–359.

[8]Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

[9]Шиманов С.Н. К теории линейных дифференциальных уравнений с последействием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 1. С. 102–116.

[10]Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гиль-

характеристических уравнений и получены асимптотические оценки их точности. На их основе разработаны процедуры вычисления корней характеристического уравнения, построения канонических аппроксимаций и процедуры нахождения аппроксимаций оптимального стабилизирующего управления для системы дифференциальных уравнений с последействием.

Усредняющая схема аппроксимации предложена Н.Н. Красовским[11] и изучалась Ю.М. Репиным, А.Б. Куржанским, Ю.Ф. Долгим, Г.В. Демиденко, F. Kappel, J.S. Gibson, J.A. Burns, M.C. Delfour. Приложению ее к задаче оптимальной стабилизации систем с запаздыванием посвящены работы Н.Н. Красовского, F. Kappel, J.S. Gibson, J.A. Burns, M.C. Delfour. В работе J.S. Gibson[6] доказана равномерная сходимость аппроксимирующих управлений к оптимальному стабилизирующему управлению системы дифференциальных уравнений с запаздыванием. В диссертации решена сложная задача нахождения асимптотики сходимости аппроксимирующих управлений к оптимальному стабилизирующему управлению системы с запаздыванием. Аналогичная задача решалась в работе M. Kroller и K. Kunisch[12] для дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа. Применение методики этой работы в задаче оптимальной стабилизации системы с запаздыванием осложняется отсутствием равномерной сходимости аппроксимирующих эволюционных операторов для малых положительных значений времени. Преодоление этой трудности потребовало существенно изменить методику доказательства работы M. Kroller и K. Kunisch и сильно усложнило обоснование результата.

Цель работы. Разработка конструктивных методов оптимальной стабилизации системы дифференциальных уравнений с последействием, использующих специальные конечномерные аппроксимации дифференциальных уравнений в функциональном пространстве состояний. Оценка точности приближений для оптимального стабилизирующего управления системы дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Методы исследования. В основе работы лежат методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, дифференциальных уравнений в банаховом пространстве; используются результаты функционального анализа, теории

бертовом пространстве. М.: Наука. 1965. 448 с.

[11] Красовский Н.Н. Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикл. матем. и механ. 1964. Т. 28. С. 716–724.

[12] Kroller M., Kunisch K. Convergence rates for the feedback operators arising in the linear quadratic regulator problem governed by parabolic equations // SIAM J. Numerical Anal. 1991. V. 28. № 5. P. 1350–1385.

экстремальных задач и теории полугрупп.

Научная новизна. Основные результаты работы являются новыми и состоят в следующем:

- Предложены методы нахождения корней характеристического уравнения для системы дифференциальных уравнений с последействием, использующие теорию характеристических определителей и определителей возмущения.
- Предложены конструктивные процедуры построения приближений для оптимального стабилизирующего управления системы дифференциальных уравнений с последействием в случае канонических аппроксимаций.
- Найдены асимптотики для аппроксимирующих эволюционных операторов неуправляемых и управляемых систем дифференциальных уравнений с запаздыванием в случае усредняющих аппроксимаций.
- Найдена асимптотика усредняющих аппроксимаций для оптимального стабилизирующего управления системы дифференциальных уравнений с запаздыванием.
- Усредняющие и канонические аппроксимации использованы для нахождения приближений оптимальных стабилизирующих управлений в популяционной модели и модели фрезерования.

Теоретическая и практическая ценность работы. Теоретическая значимость разработанных методов заключается в том, что они могут быть использованы для нахождения оптимальных стабилизирующих управлений в автономных линейных системах дифференциальных уравнений с последействием. Практическая значимость исследования заключается в том, что результаты диссертации могут быть использованы специалистами по автоматическому регулированию.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Система нумерации формул содержит три индекса, первый индекс — номер главы, второй индекс — номер параграфа, третий индекс — номер формулы в параграфе. Остальные объекты нумеруются двумя индексами, первый индекс — номер главы, второй индекс — номер объекта в главе. Общий объем работы составляет 134 страницы машинописного текста.

Апробация работы. Основные результаты диссертации обсуждались и докладывались на 38, 39, 41, 42-й региональных молодежных конференциях "Проблемы теоретической и прикладной математики" (Екатеринбург, 2007, 2008, 2010, 2011 гг.); Международной научной конференции "Современные проблемы вычислительной математики и математической физики" (Москва, 2009 г.); Воронежской весенней математической школе "Современные методы краевых задач" (Воронеж, 2010 г.); XI Международной конференции "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" (Конференции Пятницкого) (Москва, 2010 г.); Международной конференции по математической теории управления и механике (Суздаль, 2011 г.); XIV Всероссийской конференции "Математическое программирование и приложения" (Екатеринбург, 2011 г.); Всероссийская научная конференция "Математическая теория управления и математическое моделирование" (Ижевск, 2012 г.); X Международная Четаевская конференция "Аналитическая механика, устойчивость и управление" (Казань, 2012 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1–17].

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается общая характеристика работы, приводятся формулировки и описания основных утверждений диссертации, сведения о литературе, относящейся к истории рассматриваемого вопроса.

В **первой главе** решена задача построения аппроксимирующих полиномиальных характеристических уравнений для систем дифференциальных уравнений с последействием. Рассматривается линейная автономная система дифференциальных уравнений с последействием

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\tau}^{0} d\eta(\vartheta)x(t+\vartheta), \quad t \in \mathbb{R}^{+} = (0, +\infty), \tag{1}$$

где $x : [-\tau, +\infty) \to \mathbb{R}^n$; η — матричная функция с ограниченным изменением на $[-\tau, 0]$, $\eta(0) = 0$.

При исследовании уравнения (1) конечномерная постановка задачи заменяется бесконечномерной постановкой. С помощью формул $\mathbf{x}_t(\vartheta) = x(t+\vartheta)$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$, $t \geq 0$, вводятся функциональные элементы для решений системы (1), принадлежащие сепарабельному гильбертовому пространству $\mathbb{H} = \mathbb{L}_2([-\tau, 0), \mathbb{C}^n) \times \mathbb{C}^n$ со скалярным произведением $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbb{H}} = \mathbf{y}^*(0)\mathbf{x}(0) + \int_{-\tau}^{0} \mathbf{y}^*(\vartheta)\mathbf{x}(\vartheta)\, d\vartheta$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}$.

В функциональном пространстве состояний $\mathbb{H}$ системе (1) ставится в соответствие уравнение

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{2}$$

где оператор $\mathbf{A} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ задается формулами

$$(\mathbf{A}\mathbf{x})(\vartheta) = \frac{d\mathbf{x}(\vartheta)}{d\vartheta}, \quad \vartheta \in [-\tau, 0), \quad (\mathbf{A}\mathbf{x})(0) = \int\limits_{-\tau}^{0} d\eta(\vartheta)\,\mathbf{x}(\vartheta)$$

и имеет область определения $\mathcal{D}(\mathbf{A}) = \left\{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{W}_2^1([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)\right\}$.

Спектр оператора $\mathbf{A}$ состоит из собственных чисел, которые являются корнями трансцендентного характеристического уравнения

$$D(\lambda) = \det\left(\lambda I_n - \int\limits_{-\tau}^{0} d\eta(\vartheta)\exp(\lambda\vartheta)\right) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Здесь I_n — единичная матрица размерности $n \times n$, $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел. Функция D является целой функцией экспоненциального типа.

Ставится задача построения аппроксимирующих полиномиальных характеристических уравнений для систем дифференциальных уравнений с последействием. При ее решении была использована связь между спектром инфинитезимального оператора $\mathbf{A}$ и его резольвенты $R_0 = R(\lambda_0; \mathbf{A})$.

Исследованию свойств резольвенты посвящен параграф 1.2.

Лемма 1 *Оператор R_0 является оператором Гильберта—Шмидта и допускает представление в виде суммы конечномерного и вольтеррова операторов*

$$R_0 = K_0 + V_0,$$

где $(K_0\varphi)(\vartheta) = \exp(\lambda_0\vartheta)f_0(\varphi)$, $(V_0\varphi)(\vartheta) = \int_\vartheta^0 \exp(\lambda_0(\vartheta - \xi))\varphi(\xi)\,d\xi$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$, $\varphi \in \mathbb{H}$. *Здесь* $f_0(\varphi) = \Delta^{-1}(\lambda_0)\left(\varphi(0) + \int_{-\tau}^{0} g_0(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi\right)$, $g_0(\xi) = \int_{-\tau}^{\xi} d\eta(\vartheta)\exp(\lambda_0(\vartheta - \xi))$, $\xi \in [-\tau, 0]$.

Лемма 2 *Оператор R_0^* является оператором Гильберта Шмидта и допускает представление в виде суммы конечномерного и вольтеррова операторов*

$$R_0^* = K_{0*} + V_{0*},$$

где $(K_{0*}\psi)(\vartheta) = \alpha_*(\vartheta) f_{0*}(\psi)$, $(V_{0*}\psi)(\vartheta) = \int\limits_{-\tau}^{\vartheta} \exp(-\overline{\lambda}_0 (\vartheta - \xi))\psi(\xi)\, d\xi$, $\vartheta \in [-\tau, 0)$, $(V_{0*}\psi)(0) = 0$, $\psi \in \mathbb{H}$. *Здесь* $\alpha_*(0) = I_n$, $\alpha_*(\vartheta) = \int_{-\tau}^{\vartheta} d\eta^*(\xi) \exp\left(-\overline{\lambda}_0(\vartheta - \xi)\right)$, $\vartheta \in [-\tau, 0)$, $f_{0*}(\psi) = \Delta^{*-1}(\lambda_0)\left(\psi(0) + \int_{-\tau}^{0} \exp(\overline{\lambda}_0\xi)\psi(\xi)\, d\xi\right)$.

Операторы R_0 и R_0^* являются операторами Гильберта Шмидта. При аппроксимации их характеристических определителей полиномами требуется регуляризация[10]. В тоже время степени этих операторов R_0^m и R_0^{*m}, $m \geq 2$, являются ядерными операторами и при аппроксимации их характеристических определителей регуляризация полиномами не требуется.

Утверждение 1 *Оператор* R_0^m $(m \geq 2)$ *является ядерным оператором и допускает представление в виде суммы конечномерного и вольтеррова операторов*

$$R_0^m = K_{0m} + V_{0m},$$

$$(K_{0m}\varphi)(\vartheta) = \exp(\lambda_0\vartheta) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\vartheta^k}{k!} f_{mk}(\varphi),$$

$$(V_{0m}\varphi)(\vartheta) = \int\limits_{\vartheta}^{0} \frac{(\xi - \vartheta)^{m-1}}{(m-1)!} \exp(\lambda_0 (\vartheta - \xi))\varphi(\xi)\, d\xi, \quad \vartheta \in [-\tau, 0], \quad \varphi \in \mathbb{H}.$$

Здесь отображения $f_{mk} : \mathbb{H} \to \mathbb{C}^n$ *определяются рекуррентными формулами:* $f_{10}(\varphi) = f_0(\varphi)$, $f_{m0}(\varphi) = \sum_{k=0}^{m-2} f_0(\alpha_k) f_{m-1k}(\varphi) + f_0(V_{0m-1}\varphi)$, $\alpha_k(\vartheta) = \exp(\lambda_0\vartheta)\left(\vartheta^k/k!\right) I_n$, $f_{mk+1}(\varphi) = -f_{m-1k}(\varphi)$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$, $0 \leq k \leq m-2$.

Утверждение 2 *Оператор* R_0^{*m} $(m \geq 2)$ *является ядерным оператором и допускает представление в виде суммы конечномерного и вольтеррова операторов*

$$R_0^{*m} = K_{*m} + V_{*m},$$

$$(K_{*m}\psi)(\vartheta) = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{*k}(\vartheta) f_{*mk}(\psi), \quad \vartheta \in [-\tau, 0],$$

$$(V_{*m}\psi)(\vartheta) = \int\limits_{-\tau}^{\vartheta} \frac{(\vartheta - \xi)^{m-1}}{(m-1)!} \exp(\overline{\lambda}_0 (\xi - \vartheta))\psi(\xi)\, d\xi, \quad \vartheta \in [-\tau, 0),$$

$$(V_{*m}\psi)(0) = 0, \quad \psi \in \mathbb{H}.$$

Здесь отображения $f_{*mk} : \mathbb{H} \to \mathbb{C}^n$ *определяются рекуррентными формулами:* $f_{*10}(\psi) = f_{0*}(\psi)$, $f_{*m0}(\psi) = \sum_{k=0}^{m-2} f_{0*}(\alpha_{*k}) f_{*m-1k}(\psi) + f_0(V_{*m-1}\psi)$, $f_{*mk}(\psi) = f_{*m-1k-1}(\psi)$, $\alpha_{*k}(\vartheta) = \int_{-\tau}^{\vartheta} \exp(\overline{\lambda}_0(\xi - \vartheta))\alpha_{*k-1}(\xi)d\xi$, $1 \le k \le m-1$, $\alpha_{*0}(\vartheta) = \alpha_*(\vartheta)$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$.

В параграфе 1.3 изложен первый метод построения аппроксимирующих характеристических уравнений. Представление оператора R_0 в виде суммы конечномерного и вольтеррова операторов позволяет при построении аппроксимирующих характеристических уравнений эффективно использовать метод определителей возмущения[10]. Таким образом, первый метод позволяет строить аппроксимирующие полиномиальные характеристические уравнения в следующем виде

$$D_{\lambda_0 N}(\lambda) = \det\left(\lambda I_n - \sum_{k=0}^{N} \frac{(\lambda - \lambda_0)^k}{k!} \int_{-\tau}^{0} d\eta(\vartheta)\vartheta^k e^{\lambda_0 \vartheta}\right) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Теорема 1 *Пусть* $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ *является регулярным значением оператора* $\mathbf{A}$. *Тогда для любой ограниченной замкнутой области* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *и любого положительного числа* ε *справедлива асимптотическая формула*

$$\max_{\lambda \in \Omega} |D(\lambda) - D_{\lambda_0 N}(\lambda)| = O\left(\exp\left(-(1-\varepsilon)N\ln N\right)\right), \quad N \to +\infty.$$

Второй метод, изложенный в параграфе 1.4, основан на теории характеристических определителей для ядерных операторов. Пусть $\{\varphi_j\}_{j=1}^{+\infty}$ произвольный ортонормированный базис пространства $\mathbb{H}$. Введем для оператора R_0^m $(m \ge 2)$ аппроксимирующие полиномиальные характеристические определители

$$D_{R_{0N}^m}(z) = \det \left\| \delta_{jk} - z\langle R_0^m \varphi_j, \varphi_k\rangle_{\mathbb{H}} \right\|_{j,k=1}^{N}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Теорема 2 *Пусть* $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ *является регулярным значением оператора* $\mathbf{A}$ *и* $\{\varphi_j\}_{j=1}^{+\infty}$ *— произвольный ортонормированный базис пространства* $\mathbb{H}$. *Тогда для любой ограниченной замкнутой области* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *справедлива асимптотическая формула*

$$\max_{z \in \Omega} |D_{R_0^m}(z) - D_{R_{0N}^m}(z)| = O\left(\sum_{k=N+1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m-1} \left|\langle \varphi_k, \chi_{*mji}\rangle_{\mathbb{H}}\right|^2 + \int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{0} B_m(\xi_1, \xi_2)\varphi_k^*(\xi_1)\varphi_k(\xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2\right)\right), \quad N \to +\infty.$$

Здесь $B_m(\xi_1, \xi_2) = \int_{-\tau}^{0} \overline{\beta}_{*m}(\vartheta - \xi_1)\beta_{*m}(\vartheta - \xi_2)\, d\vartheta$, $\xi_1, \xi_2 \in [-\tau, 0]$.

В параграфе 1.5 для построения характеристических уравнений использовано разложение Шмидта

$$R_0^m\varphi = \sum_{j=1}^{+\infty} s_j\left(R_0^m\right)\langle\varphi,\varphi_j\rangle_{\mathbb{H}} U\varphi_j, \quad \varphi\in\mathbb{H}, \quad m\geq 1,$$

где $\{\varphi_j\}_{j=1}^{+\infty}$ — ортонормированная система собственных векторов самосопряженного оператора $\left(R_0^{m*}R_0^m\right)^{1/2}$, $\{s_j\left(R_0^m\right)\}_{j=1}^{+\infty}$ — его собственные числа, называемые сингулярными числами оператора R_0^m, унитарный оператор U определяется полярным представлением $R_0^m = U\left(R_0^{m*}R_0^m\right)^{1/2}$. В этом параграфе построена краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения собственных векторов $\left(R_0^{m*}R_0^m\right)^{1/2}$.

Для разложения Шмидта оператора R_0^m, $m\geq 2$, аппроксимирующие полиномиальные характеристические определители определяются формулами

$$D_{R_{0N}^m}(z) = \det\left\|\delta_{jk} - zs_k\langle U\varphi_j,\varphi_k\rangle_{\mathbb{H}}\right\|_{j,k=1}^{N}, \quad z\in\mathbb{C}, \quad N\in\mathbb{N}.$$

Теорема 3 *Пусть* $\lambda_0\in\mathbb{C}$ *является регулярным значением оператора* **А**. *Тогда для любой ограниченной замкнутой области* $\Omega\subset\mathbb{C}$ *и* $m\geq 2$ *справедлива асимптотическая формула*

$$\max_{z\in\Omega}\left|D_{R_0^m}(z) - D_{R_{0N}^m}(z)\right| = o\left(N^{-m+3/2}\right), \quad N\to+\infty.$$

Во **второй главе** рассматривается задача оптимальной стабилизации системы дифференциальных уравнений с последействием относительно квадратичного критерия качества с помощью метода канонических аппроксимаций.

В параграфе 2.1 приводится общая постановка задачи об аппроксимации оптимального стабилизирующего управления. Объект управления описывается линейной системой дифференциальных уравнений с последействием

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\tau}^{0} d\eta(\vartheta)\,x(t+\vartheta) + Bu, \quad t\geq 0, \tag{3}$$

где $x:[-\tau,+\infty)\to\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}^r$ — управление, η — матричнозначная функция с ограниченной вариацией на отрезке $[-\tau,0]$, $\eta(0)=0$, B — постоянная матрица. Оптимальное стабилизирующее управление, формируемое по принципу обратной связи, обеспечивает устойчивую работу системы (3) и минимизирует следующий критерий качества переходных процессов

$$J = \int\limits_0^\infty \left[x^T(t)\,C_1 x(t) + u^T(t)\,C_2 u(t)\right]\,dt, \tag{4}$$

где C_1 — постоянная неотрицательная матрица, C_2 — постоянная положительно определенная матрица.

В функциональном пространстве состояний $\mathbb{H}$ системе (3) соответствует уравнение

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}u, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{5}$$

однородная часть которого совпадает с уравнением (2), ограниченный оператор $\mathbf{B} : \mathbb{R}^r \to \mathbb{H}$ определяется формулами $(\mathbf{B}u)(\vartheta) = 0$, $\vartheta \in [-\tau, 0)$, $(\mathbf{B}u)(0) = Bu$, $u \in \mathbb{R}^r$.

Критерий качества (4) описывается формулой

$$J = \int\limits_0^\infty \left(\langle \mathbf{C}_1\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t\rangle_{\mathbb{H}} + u^T(t)\,C_2 u(t)\right)\,dt, \tag{6}$$

где $(\mathbf{C}_1\mathbf{x})(0) = C_1 x(0)$, $(\mathbf{C}_1\mathbf{x})(\vartheta) = 0$, $\vartheta \in [-\tau, 0)$.

Оптимальное стабилизирующее управление $\mathbf{u}^0$ задачи (5), (6) задается формулой $\mathbf{u}^0(\mathbf{x}) = -C_2^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{\Pi}\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$, где $\mathbf{B}^* : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^r$, $\mathbf{B}^*\mathbf{x} = B^T\mathbf{x}(0)$, а $\mathbf{\Pi} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ — положительный самосопряженный ядерный оператор, удовлетворяющий операторному уравнению Риккати.

Решение задачи (5), (6) будем приближать последовательностью решений задач оптимальной стабилизации дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}_N\mathbf{x} + \mathbf{B}_N u, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}_N, \tag{7}$$

с критериями качества

$$J_N = \int\limits_0^\infty \left[\langle \mathbf{C}_{1N}\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t\rangle_{\mathbb{H}} + u^T(t)\,C_2 u(t)\right]\,dt. \tag{8}$$

Здесь $\mathbf{A}_N : \mathbb{H}_N \to \mathbb{H}_N$, $\mathbf{B}_N : \mathbb{R}^r \to \mathbb{H}_N$, $\mathbf{C}_{1N} : \mathbb{H}_N \to \mathbb{H}_N$ — конечномерные операторы, $N \in \mathbb{N}$. Пространство $\mathbb{H}_N$ является N-мерным подпространством пространства $\mathbb{H}$ и задается с помощью проектора $\mathbf{P}_N : \mathbb{H} \to \mathbb{H}_N$.

Пусть оператор π_N определяет топологический изоморфизм пространств $\mathbb{H}_N$ и $\mathbb{C}^N$. Оператор $\iota_N : \mathbb{C}^N \to \mathbb{H}_N$ зададим формулой $\iota_N = \pi_N^{-1}$. Используя введенные операторы, получим, что задача стабилизации (7), (8) в пространстве $\mathbb{H}_N$ эквивалентна задаче стабилизации дифференциального уравнения

$$\frac{dX_N}{dt} = A_N X_N + B_N u, \quad X_N \in \mathbb{C}^N, \tag{9}$$

с критерием качества

$$J_N = \int_0^\infty \left[X_N^*(t)\, C_{1N} X_N(t) + u^T(t)\, C_2 u(t)\right] dt, \tag{10}$$

где $A_N = \pi_N \mathbf{A}_N \iota_N$, $B_N = \pi_N \mathbf{B}_N$, $C_{1N} = \iota_N^* \mathbf{C}_{1N} \iota_N$.

Решение задачи (9), (10) определяется формулой $u_N^0(X_N) = -C_2^{-1} B_N^* \Pi_N X_N$, $X_N \in \mathbb{C}^N$, где Π_N — положительно определенное решение уравнения Риккати

$$A_N^* \Pi_N + \Pi_N A_N + C_{1N} - \Pi_N B_N C_2^{-1} B_N^* \Pi_N = 0. \tag{11}$$

Используя изоморфизм пространств $\mathbb{H}_N$ и $\mathbb{C}^N$ получим, что управление $\mathbf{u}_N^0(\mathbf{x}) = -C_2^{-1} \mathbf{B}_N^* \mathbf{\Pi}_N \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{H}_N$, где $\mathbf{\Pi}_N = \pi_N^* \Pi_N \pi_N$, является оптимальным стабилизирующим управлением задачи (7), (8). Расширим задачи (7), (8) и $\mathbf{u}_N^0(\mathbf{x})$ на пространство $\mathbb{H}$, заменяя $\mathbf{x}$ на $\mathbf{P}_N \mathbf{x}$. Для расширений соответствующих операторов оставим прежние обозначения, заменяя операторы $\mathbf{A}_N \mathbf{P}_N$, $\mathbf{C}_{1N} \mathbf{P}_N$, $\pi_N \mathbf{P}_N$ на $\mathbf{A}_N$, $\mathbf{C}_{1N}$, π_N. Расширения управления $\mathbf{u}_N^0$ будем рассматривать в качестве аппроксимаций оптимального стабилизирующего управления.

В связи с аппроксимирующей задачей (7), (8) возникает три задачи:

1. Разработка конструктивных методов нахождения приближений оптимального стабилизирующего управления задачи (5), (6).

2. Доказательство сходимости приближений оптимального управления к оптимальному управлению задачи (5), (6).

3. Оценка точности аппроксимирующих управлений.

Вторая глава посвящена каноническим аппроксимациям задачи оптимальной стабилизации. В ней получили развитие исследования по разработке конструктивных методов нахождения приближений оптимально стабилизирующих управлений для систем с последействием. При их численной реализации используются методы Р. Беллмана, Н.Н. Красовского и

Л.С. Понтрягина оптимальной стабилизации конечномерных систем. Для канонических аппроксимаций проблема сходимости приближений к оптимальному стабилизирующему управлению системы с последействием остается открытой. В этой главе установлено, что семейство проекторов, порождающих каноническую аппроксимацию, не является равномерно ограниченным на всем пространстве $\mathbb{H}$, поэтому нельзя говорить о их сильной сходимости к тождественным операторам на всем пространстве $\mathbb{H}$. В то же время показано, что сходимость к тождественному оператору в равномерной топологии имеет место на некотором подпространстве пространства $\mathbb{H}$.

В параграфе 2.2 получены явные формулы для проекторов, определяющих каноническое разложение пространства состояний, изучены некоторые их свойства. Корни характеристического уравнения

$$\delta(\lambda) = \det\Delta(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{12}$$

где $\Delta(\lambda) = \lambda I - \int_{-\tau}^{0} d\eta(\vartheta)\, e^{\lambda\vartheta}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, являются собственными числами инфинитезимального оператора $\mathbf{A}$ и могут быть занумерованы в порядке убывания вещественных частей λ_k, $k \in \mathbb{N}$. Пусть $\mathbb{H}_N$ — объединение корневых подпространств оператора $\mathbf{A}$, отвечающих его собственным числам $\sigma_{N'} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_{N'}\}$, $N' \in \mathbb{N}$. Проектор $\mathbf{P}_N$ ($\mathbf{P}_N\mathbb{H} = \mathbb{H}_N$) задает каноническое разложение пространства $\mathbb{H}$ в прямую сумму, при котором $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$ однозначно определяет элементы $\mathbf{y} \in \mathbb{H}_N$ и $\mathbf{z} \in (I - \mathbf{P}_N)\mathbb{H}$ такие, что $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$.

Проекционный оператор можно определить формулой

$$\mathbf{P}_N = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{N'}} R(\lambda; \mathbf{A})\, d\lambda,$$

где $\Gamma_{N'}$ — замкнутый спрямляемый контур, лежащий в резольвентном множестве $\rho(\mathbf{A})$, содержащий внутри себя множество $\sigma_{N'}$ и не содержащий точки $\sigma(\mathbf{A})/\sigma_{N'}$.

Утверждение 3 *Если все корни λ_k, $k = 1, \ldots, N'$, характеристического уравнения* (12) *простые, то имеем $N' = N$, а представление проектора определяется формулой*

$$(\mathbf{P}_N\mathbf{x})(\vartheta) = \sum_{k=1}^{N} \frac{D(\lambda_k)}{\delta'(\lambda_k)} \left(\mathbf{x}(0) + \int\limits_{-\tau}^{0} \int\limits_{-\tau}^{s} e^{\lambda_k(\xi - s)} d\eta(\xi)\, \mathbf{x}(s)\, ds \right) e^{\lambda_k\vartheta},$$

где $D(\lambda)$ — присоединенная матрица для $\Delta(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Семейство операторов $\mathbf{P}_N$, $N \in \mathbb{N}$, не является даже равномерно ограниченным на всем пространстве $\mathbb{H}$.

Теорема 4 *Для дифференциального уравнения с запаздыванием*

$$\eta(0) = 0, \quad \eta(\vartheta) = -A, \ \vartheta \in (-\tau, 0), \quad \eta(-\tau) = -A - A_\tau,$$

где A, A_τ — постоянные квадратные матрицы. Пусть все корни характеристического уравнения (12) простые, собственные числа матрицы A_τ попарно различны и отличны от нуля, $\det(A + A_\tau) \neq 0$, *тогда справедливы асимптотические соотношения*

$$\|\mathbf{P}_N - I\|_{\widetilde{\mathbb{W}}_2^3 \to C} = O\left(N^{-1}\right), \quad N \to \infty.$$

Подпространство $\widetilde{W}_2^3 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{W}_2^3\left([-\tau, 0], \mathbb{R}^n\right) : \dot{\mathbf{x}}(0) = A\mathbf{x}(0) + A_\tau \mathbf{x}(-\tau)\right\}$ *снабжено нормой пространства Соболева* $\mathbb{W}_2^3\left([-\tau, 0], \mathbb{R}^n\right)$, *пространство* $C = C\left([-\tau, 0], \mathbb{R}^n\right)$ *— пространство непрерывных функций.*

Параграф 2.4 посвящен задаче оптимальной стабилизации (5), (6). При построении канонических аппроксимаций задачи оптимальной стабилизации в уравнении (7) следует положить $\mathbf{A}_N = \mathbf{A}\mathbf{P}_N$, $\mathbf{B}_N = \mathbf{P}_N\mathbf{B}$, в критерии качества (8) $\quad \mathbf{C}_{1N} = \mathbf{P}_N^*\mathbf{C}_1\mathbf{P}_N$.

Утверждение 4 *Если корни характеристического уравнения λ_k, $k = 1, \ldots, N$, простые, то справедливы формулы*

$$(\mathbf{A}_N\mathbf{x})(\vartheta) = (\mathbf{A}\mathbf{P}_N\mathbf{x})(\vartheta) = \sum_{k=1}^{N} \frac{D(\lambda_k)}{\delta'(\lambda_k)} \lambda_k \left(\mathbf{x}(0) + \int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{s} e^{\lambda_k(\xi - s)} d\eta(\xi)\, \mathbf{x}(s)\, ds\right) e^{\lambda_k \vartheta},$$

$$(\mathbf{B}_N u)(\vartheta) = (\mathbf{P}_N\mathbf{B}u)(\vartheta) = \sum_{k=1}^{N} \frac{D(\lambda_k)}{\delta'(\lambda_k)} Bu e^{\lambda_k \vartheta}, \quad u \in \mathbb{R}^r, \quad \vartheta \in [-\tau, 0],$$

$$(\mathbf{C}_{1N}\mathbf{x})(0) = \sum_{k,m=1}^{N} \frac{D^T(\overline{\lambda}_k)\, C_1 D^T(\lambda_m)}{\delta'(\overline{\lambda}_k)\, \delta'(\lambda_m)} \lambda_k \left(\mathbf{x}(0) + \int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{s} e^{\lambda_k(\xi - s)} d\eta(\xi)\, \mathbf{x}(s)\, ds\right),$$

$$(\mathbf{C}_{1N}\mathbf{x})(\vartheta) = \int_{-\tau}^{\vartheta} e^{\overline{\lambda}_k(\xi - \vartheta)} d\eta^T(\xi)\, (\mathbf{C}_{1N}\mathbf{x})(0), \quad \vartheta \in [-\tau, 0), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}.$$

Теорема 5 *Пусть уравнение Риккати (11) имеет единственное положительно определенное решение, все собственные числа оператора* $\mathbf{A}$, *принадлежащие множеству* $\sigma(\mathbf{A})/\sigma_{N'}$, *имеют отрицательные действительные части, тогда управление*

$$\mathbf{u}_N(\mathbf{x}) = -C_2^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{P}_N^*\mathbf{\Pi}_N\mathbf{P}_N\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}$$

является стабилизирующим для системы с последействием (3). *Здесь конечномерный оператор* $\mathbf{\Pi}_N : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *определяется формулой* $\mathbf{\Pi}_N = \pi_N^*\overline{\Pi}_N\pi_N$.

В параграфе 2.5, используя базисы пространств $\mathbb{H}_N$ и $\mathbb{H}_N^*$, найдены представления топологических изоморфизмов π_N. Здесь $\mathbb{H}_N^*$ — объединение корневых подпространств оператора $\mathbf{A}^*$, отвечающих его собственным числам $\overline{\lambda}_k$, $k = 1, \ldots, N'$. Для упрощения формулировок теорем здесь приведены результаты только для случая простых собственных чисел оператора $\mathbf{A}$. В параграфе 2.5 все утверждения сформулированы и для случая кратных собственных чисел оператора $\mathbf{A}$.

В случае простых собственных чисел оператора $\mathbf{A}$ в пространстве $\mathbb{H}_N$ можно ввести базис, состоящий из собственных функций этого оператора, отвечающих собственным числам λ_k, $k = 1, \ldots, N$, а в пространстве $\mathbb{H}_N^*$ — из собственных функций оператора $\mathbf{A}^*$, отвечающих собственным числам $\overline{\lambda}_k$, $k = 1, \ldots, N$.

Лемма 3 *Если собственные числа* λ_k, $k = 1, \ldots, N$, *оператора* $\mathbf{A}$ *простые, то базис пространства* $\mathbb{H}_N$, *состоящий из собственных функций оператора* $\mathbf{A}$, *определяется формулами*

$$\Phi^k(\vartheta) = \Phi^k(0)\, e^{\lambda_k\vartheta}, \quad \vartheta \in [-\tau, 0],$$

где $\Phi^k(0)$ — *нетривиальные решения алгебраических систем*

$$\left(\lambda_k I_n - \int\limits_{-\tau}^{0} d\eta(\vartheta)\, e^{\lambda_k\vartheta}\right)\Phi^k(0) = 0, \quad k = 1, \ldots N.$$

Лемма 4 *Если собственные числа* λ_k, $k = 1, \ldots, N$, *оператора* $\mathbf{A}$ *простые, то базис пространства* $\mathbb{H}_N^*$, *состоящий из собственных функций оператора* $\mathbf{A}^*$, *определяется формулами*

$$\Psi^k(\vartheta) = e^{-\overline{\lambda}_k\vartheta}\left(\overline{\lambda}_k I_n - \int\limits_{\vartheta}^{0} e^{\overline{\lambda}_k s} d\eta^{\top}(s)\right)\Psi^k(0), \ \vartheta \in [-\tau, 0), \ \Psi^k(0) = \Psi^k(0),$$

где $\Psi^k(0)$ — *нетривиальные решения алгебраических систем*

$$\left(\overline{\lambda}_k I_n - \int\limits_{-\tau}^{0} e^{\overline{\lambda}_k s} d\eta^T(s)\right)\Psi^k(0) = 0, \quad k = 1, \ldots, N.$$

Лемма 5 *Базисы пространств* $\mathbb{H}_N$ *и* $\mathbb{H}_N^*$, *определяемые формулами* $\varphi^k = \sum_{j=1}^N x_{kj}\Phi^j$, $\psi^k = \sum_{j=1}^N y_{kj}\Psi^j$, $k = 1, \ldots, N$, *соответственно, биортогональны. Здесь* $X = \|x_{kj}\|_{k,j=1}^N$, $\det X \neq 0$, $Y = \|y_{kj}\|_{k,j=1}^N = X^{-1*}$.

Биортогональность базисов, введенных в предыдущей лемме, позволяет определить координатное представление проектора $\mathbf{P}_N$ по следующей формуле

$$\mathbf{P}_N \mathbf{x} = \sum_{k=1}^{N} \langle \mathbf{x}, \psi^k \rangle_{\mathbb{H}} \varphi^k, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}_N.$$

Утверждение 5 *Если собственные числа* λ_k, $k = 1, \ldots, N$, *оператора* $\mathbf{A}$ *простые, то отображение* π_N, *заданное формулой*

$$\pi_N \mathbf{y} = \|\langle \mathbf{y}, \psi^k \rangle_{\mathbb{H}}\|_{k=1}^N = \|y_k\|_{k=1}^N = y, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{H}_N,$$

определяет топологический изоморфизм пространств $\mathbb{H}_N$ *и* $\mathbb{C}^N$.

Используя базисы пространств $\mathbb{H}_N$ и $\mathbb{H}_N^*$, конкретизируем задачу оптимальной стабилизации в пространстве $\mathbb{C}^N$.

Утверждение 6 *Если все собственные числа* λ_k, $k = 1, \ldots, N$, *оператора* $\mathbf{A}$ *простые, представления конечномерных операторов* A_N, B_N, C_{1N} *задачи оптимальной стабилизации* (7), (8) *определяются матрицами*

$$A_N = X^{-1T} \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) X^T, \; B_N = X^{-1T} \|\Psi^{j*}(0)\|_{j=1}^N B,$$
$$C_{1N} = \overline{X} \|\Phi^{k*}(0) C_1 \Phi^l(0)\|_{k,l=1}^N X^T.$$

При выполнении условий теоремы 5 стабилизирующее управление системы (3) *вычисляется по формуле*

$$\mathbf{u}_N^0(\mathbf{x}) = -C_2^{-1} B^T \|\Psi^{iT}(0)\|_{i=1,\ldots,N}^T (\overline{X})^{-1} \Pi_N X^{-1T} \|\langle \mathbf{x}, \Psi^i \rangle_{\mathbb{H}}\|_{i=1}^N.$$

В параграфе 2.6 рассматривается метод нахождения приближений оптимального стабилизирующего управления с помощью метода Понтрягина, в случае $r = 1$, $m_i = 1$, $i = 1, \ldots, N'$. Ранее этот подход использовался только для скалярных дифференциальных уравнений с сосредоточенным запаздыванием. Задача нахождения приближений оптимального стабилизирующего управления сведена к задаче факторизации для полиномов.

В параграфе 2.7 приведено три тестовых примера и рассмотрена задача построения стабилизирующего управления в модели Лотки—Вольтерра с запаздыванием. В первом и втором тестовых примерах описано построение аппроксимаций оптимальных стабилизирующих управлений для системы с запаздыванием с простыми и кратными собственными числами соответственно. В третьем тестовом примере построены аппроксимации стабилизирующих управлений для специальной системы с распределенным запаздыванием, для которой известна аналитическая форма оптимального стабилизирующего управления. Произведено сравнение найденных аппроксимаций с точным управлением. Также в этом параграфе рассмотрена задача построения стабилизирующего управления в модели Лотки—Вольтерра с запаздыванием.

В **третьей главе** исследуется задача оптимальной стабилизации дифференциального уравнения с запаздыванием методом усредняющих аппроксимаций. Глава состоит из пяти параграфов.

В первом параграфе приведена постановка задачи. Объект управления задается дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + A_\tau x(t-\tau) + Bu, \quad t \in [0, \infty), \tag{13}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$, A, A_τ — постоянные матрицы порядка n, B — постоянная матрица размерности $n \times r$. Оптимальное стабилизирующее управление обеспечивает устойчивую работу системы (13) и минимизирует критерий качества переходных процессов

$$J = \int\limits_0^\infty \left(x^T(t)\, C_1 x(t) + u^T(t)\, C_2 u(t)\right) dt, \tag{14}$$

где C_1 — постоянная неотрицательная матрица, C_2 — постоянная положительно определенная матрица.

Метод усредняющих аппроксимаций был предложен в работе[11] и основан на замене исходной задачи задачами оптимальной стабилизации систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_0^N}{dt} &= Ax_0^N + A_\tau x_N^N + Bu, \\
\frac{dx_i^N}{dt} &= \frac{N}{\tau}\left(x_{i-1}^N - x_i^N\right), \quad i = 1, \ldots, N,
\end{aligned} \tag{15}
$$

с критериями качества

$$
J_N = \int_0^\infty \left(x_0^{NT}(t)\, C_1 x_0^N(t) + u^T(t)\, C_2 u(t)\right) dt, \tag{16}
$$

где $x_i^N \in \mathbb{R}^n$, $i = 0, \ldots, N$, существующие и единственные при $N \geq N_0$ и надлежащем выборе натурального числа N_0.

Следуя методике второй главы переходим от постановки задачи в конечномерном пространстве состояний к постановке задачи в специальном гильбертовом пространстве $\mathbb{H} = \mathbb{L}_2([-\tau, 0), \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$. Рассматриваемая аппроксимация не требует комплексификации пространства $\mathbb{H}$. Она определена для системы (13) частного вида. Поэтому в уравнении (5) оператор $\mathbf{A}$ задается формулами

$$
(\mathbf{A}\mathbf{x})(\vartheta) = \frac{d\mathbf{x}(\vartheta)}{d\vartheta}, \quad \vartheta \in [-\tau, 0), \quad (\mathbf{A}\mathbf{x})(0) = A\mathbf{x}(0) + A_\tau \mathbf{x}(-\tau).
$$

Вид критерия качества (6) в функциональном пространстве состояний остается прежним.

Основная задача третьей главы — нахождение оценки сверху скорости сходимости аппроксимирующих оптимальных стабилизирующих управлений к оптимальному стабилизирующему управлению задачи (13), (14).

Задачу стабилизации (15), (16) будем изучать в пространстве $\mathbb{H}$. Уравнению (15) соответствует дифференциальное уравнение (7), где $\mathbf{A}_N = \iota_N A^N \pi_N$, A^N — квадратная матрица порядка $(N+1)n$, блочные элементы которой определяются системой (13), а инъективные отображения $\iota_N : \mathbb{R}^{(N+1)n} \to \mathbb{H}$ и сюръктивные отображения $\pi_N : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^{(N+1)n}$ задаются формулами

$$
\iota_N X_N = \chi_{\{0\}} x^0 + \sum_{k=1}^{N} \chi_{[-\frac{k}{N}\tau, -\frac{k-1}{N}\tau)} x^k, \; X_N = \operatorname{col}\left(x^0, \ldots, x^N\right) \in \mathbb{R}^{(N+1)n},
$$

$$
\pi_N \mathbf{x} = \operatorname{col}\left(\mathbf{x}(0), \frac{N}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{N}}^{0} \mathbf{x}(\xi)\, d\xi, \ldots, \frac{N}{\tau}\int_{-\tau}^{-\tau+\frac{\tau}{N}} \mathbf{x}(\xi)\, d\xi\right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}, \quad N \in \mathbb{N}.
$$

Здесь χ_E — индикатор множества E.

Критериям качества (16) соответствуют критерии качества

$$J_N = \int\limits_0^\infty \left((\pi_N \mathbf{x}_t)^T C_{1N} (\pi_N \mathbf{x}_t) + u^T(t) C_2 u(t) \right) dt, \quad N \geq N_0, \qquad (17)$$

где $C_{1N} = \left\{ C_{1N}^{ij} \right\}_{i,j=0}^{N}$ — квадратная матрица порядка $(N+1)n$, $C_{1N}^{00} = C_1$, $C_{1N}^{ij} = C_1$, если $i^2 + j^2 \neq 0$.

Утверждение 7 *Операторы π_N и ι_N обладают следующими свойствами:*

1. $\|\iota_N\|_{\mathbb{R}^{(N+1)n} \to \mathbb{H}} = 1$, $\|\pi_N\|_{\mathbb{H} \to \mathbb{R}^{(N+1)n}} = 1$ *при* $N \in \mathbb{N}$;
2. $\pi_N \iota_N X = X$, $X \in \mathbb{R}^{(N+1)n}$, $N \in \mathbb{N}$;

Для элемента $X = \operatorname{col}\left(x_0^N, \ldots, x_N^N\right) \in \mathbb{R}^{(N+1)n}$ *норма определяется формулой* $|X|^2_{(N+1)n} = |x_0^N|^2 + \frac{\tau}{N} \sum_{i=1}^N |x_i^N|^2$.

В методе усредняющих аппроксимаций важную роль играют проекторы $\mathbf{P}_N = \iota_N \pi_N$, $N \in \mathbb{N}$. В следующем утверждении сформулированы их основные свойства.

Утверждение 8 *Операторы $\mathbf{P}_N$ являются самосопряженными, ортогонально проектируют пространство $\mathbb{H}$ на $\mathbb{H}_N$, сильно сходятся к тождественному оператору в пространстве $\mathbb{H}$ и*

$$\|\mathbf{P}_N \mathbf{x} - \mathbf{x}\| \leq \frac{\tau}{N} \|\dot{\mathbf{x}}\|_{\mathbb{L}_2}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{W}_2^1\left([-\tau, 0], \mathbb{R}^n\right), \quad N \in \mathbb{N},$$

где $\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbb{H}}^{1/2}$.

В работе J.S. Gibson[6] доказана теорема о сходимости аппроксимирующих управлений к оптимальному управлению.

Теорема 6 *Если система* (13) *стабилизируема и матрица C_1 положительно определена, то последовательность аппроксимирующих стабилизирующих управлений $\left\{\mathbf{u}_N^0\right\}_{N \geq N_0}$ сходится в равномерной топологии к $\mathbf{u}^0$, то есть*

$$\left\|\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}_N^0\right\|_{\mathbb{H} \to \mathbb{R}^r} \to 0, \quad N \to \infty.$$

Во третьей главе получен следующий результат

Теорема 7 *Если система* (13) *стабилизируема и матрица* C_1 *положительно определена, то справедлива асимптотическая оценка*

$$\|\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}_N^0\|_{\mathbb{H}\to\mathbb{R}^r} = O\left(N^{-\frac{1}{4}}\right), \quad N \to \infty.$$

Параграф 3.2 посвящен исследованию полугрупп $T(t)$, $T_N(t)$, $t \geq 0$, порождаемых инфинитезимальными операторами $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_N$, $N \in \mathbb{N}$. В работах H.T. Banks и J.A. Burns[13], I. Lasiecka и A. Manitius[14] доказаны теоремы о сходимости аппроксимирующих полугрупп

Теорема 8 *Для любого* $t \geq 0$ *последовательность операторов* $\{T_N(t)\}_{N=N_0}^{\infty}$ *сильно сходится к* $T(t)$.

Теорема 9 *Для каждого* $L \geq 5\tau$ *справедлива асимптотическая оценка*

$$\max_{t\in[5\tau,L]} \|T(t) - T_N(t)\mathbf{P}_N\| = O\left(N^{-1}\right), \quad N \to \infty.$$

Операторы $\{T_N(t)\}_{N=N_0}^{\infty}$ не сходятся к $T(t)$ в равномерной топологии при $t \geq 0$. Однако учитывая конечномерность оператора $\mathbf{P}$, можно показать, что операторы $\mathbf{P}T_N(t)$ и $T_N(t)\mathbf{P}$ сходятся к $\mathbf{P}T(t)$ и $T(t)\mathbf{P}$ соответственно в равномерной топологии для любого $t \geq 0$. Эти сходимости играют важную роль при оценке скорости сходимости аппроксимирующих управлений.

Утверждение 9 *Для каждого* $L \in \mathbb{R}^+$ *справедлива асимптотическая оценка*

$$\max_{t\in[0,L]} \|\mathbf{P}(T_N(t) - T(t))\| = O\left(N^{-\frac{1}{4}}\right), \quad N \to \infty.$$

Утверждение 10 *Для каждого* $L \in \mathbb{R}^+$ *справедлива асимптотическая оценка*

$$\max_{t\in[0,L]} \|(T_N(t) - T(t))\mathbf{P}\| = O\left(N^{-\frac{1}{4}}\right), \quad N \to \infty.$$

[13]Banks H.T., Burns J.A. Hereditary control problems: numerical methods based on averaging approximations // SIAM J. Control and Optim. 1978. V. 16. № 2. P. 169–208.

[14]Lasiecka I., Manitius A. Differentiability and convergence rates of approximating semigroups for retarded functional differential equations // SIAM J. Numerical Anal. 1988. V. 25. № 4. P. 883–907.

При доказательстве этих утверждений использовались результаты работы[11] и методы теории интегральных уравнений. Они основываются на тонких асимптотических оценках ядер интегральных операторов, которые связаны с асимптотикой приближений для интеграла Эйлера–Пуассона.

В параграфе 3.3 производится доказательство теоремы 7. Оценка точности аппроксимаций оптимального стабилизирующего управления для системы с запаздыванием производится методом, предложенным в работе[12], при решении аналогичной задачи для параболического уравнения. В основе этого метода лежит переход от оценки разности оптимальных управлений к оценке разности значений критериев качеств на оптимальных управлениях

$$\left\|\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}_N^0\right\|_{\mathbb{H}\to\mathbb{R}^r} \leq \left|C_2^{-1}\right| |B| \sup_{\|\mathbf{x}_0\|\leq 1} \left|J\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}^0\right) - J_N\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_N^0\right)\right|.$$

Тогда, представляя пространство $\mathbb{H}$ в виде объединения подпространств $\mathbb{H}_+ = \left\{\mathbf{x}_0 : \mathbf{x}_0 \in \mathbb{H}, J\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}^0\right) - J_N\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_N^0\right) \geq 0\right\}$, $\mathbb{H}_- = \left\{\mathbf{x}_0 : \mathbf{x}_0 \in \mathbb{H}, J\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}^0\right) - J_N\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_N^0\right) < 0\right\}$, получим

$$\sup_{\|\mathbf{x}_0\|\leq 1} \left|J\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}^0\right) - J_N\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_N^0\right)\right|$$

$$\leq \max\left\{\sup_{\substack{\|\mathbf{x}_0\|\leq 1,\\ \mathbf{x}_0\in\mathbb{H}_+}} \left(J\left(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{u}}_N\right) - J_N\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_N^0\right)\right), \sup_{\substack{\|\mathbf{x}_0\|\leq 1,\\ \mathbf{x}_0\in\mathbb{H}_-}} \left(J_N\left(\mathbf{x}_0, \widehat{\mathbf{u}}_N\right) - J\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}^0\right)\right)\right\}, \tag{18}$$

где $\widetilde{\mathbf{u}}_N$, $\widehat{\mathbf{u}}_N$ — произвольные допустимые управления. Опишем метод оценки величины $J\left(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{u}}_N\right) - J_N\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_N^0\right)$.

Значение критерия качества $J_N\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_N^0\right)$ определяется формулой

$$J_N\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_N^0\right) = \int_0^\infty \left(\left\langle S_N^*(t)\, C_1 \mathbf{P} S_N(t)\, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0\right\rangle_{\mathbb{H}} + \left\langle S_N^*(t)\, \Pi_N \mathbf{D} \Pi_N S_N(t)\, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0\right\rangle_{\mathbb{H}}\right) dt, \quad \mathbf{x}_0 \in \mathbb{H}_+,$$

где $\left\{S_N(t), t \geq 0\right\}$ — полугруппа, порождаемая оператором $\mathbf{A}_N - \mathbf{D}\Pi_N$. Управление $\widetilde{\mathbf{u}}_N$ системы (5) должно быть выбрано так, чтобы разность $J\left(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{u}}_N\right) - J_N\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_N^0\right)$ допускала эффективную оценку. M. Kroller, K. Kunisch выбирали управление $\widetilde{\mathbf{u}}_N = \mathbf{u}_N^0$. В отличие от задачи стабилизации параболического уравнения в задаче стабилизации дифференциального уравнения с запаздыванием аппроксимирующие полугруппы $T_N(t)$ не сходятся к $T(t)$ при малых значениях временной переменной в равномерной топологии. Поэтому выбор управления $\widetilde{\mathbf{u}}_N$ был существенно изменен. Управления $\widetilde{\mathbf{u}}_N$ совпадает с управлением $\mathbf{u}_N^0$ при $t \geq \Delta$, а при $t \in [0, \Delta]$ его выбор описан в параграфе 3.3. В таком случае значение критерия качества $J(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{u}}_N)$ определяется формулой

$$J(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{u}}_N) = \int_0^\Delta \left(\left\langle \widetilde{S}_N^*(t) C_1 \mathbf{P} \widetilde{S}_N(t) \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 \right\rangle_{\mathbb{H}} + \left\langle S_N^*(t) \mathbf{\Pi}_N \mathbf{D} \mathbf{\Pi}_N S_N(t) \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 \right\rangle_{\mathbb{H}} \right) dt$$

$$+ \int_\Delta^\infty \left(\left\langle \widetilde{S}_N^*(\Delta) \widetilde{S}_N^{1*}(t-\Delta) C_1 \mathbf{P} \widetilde{S}_N^1(t-\Delta) \widetilde{S}_N(\Delta) \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 \right\rangle_{\mathbb{H}} \right.$$

$$\left. + \left\langle \widetilde{S}_N^*(\Delta) \widetilde{S}_N^{1*}(t-\Delta) \mathbf{\Pi}_N \mathbf{D} \mathbf{\Pi}_N \widetilde{S}_N^1(t-\Delta) \widetilde{S}_N(\Delta) \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 \right\rangle_{\mathbb{H}} \right) dt, \quad \mathbf{x}_0 \in \mathbb{H}_+,$$

где операторы $\widetilde{S}_N(t)$, $t \in [0, \Delta]$, описывают решение системы (5) при выбранном управлении $\widetilde{\mathbf{u}}_N$, $\left\{ \widetilde{S}_N^1(t), t \geq 0 \right\}$ — полугруппа, порождаемая операторами $\mathbf{A} - \mathbf{D}\mathbf{\Pi}_N$.

В результате оценка $J(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{u}}_N) - J_N\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_N^0\right)$ сводится к оценкам полугрупп $\widetilde{S}_N(t)$, $\widetilde{S}_N^1(t)$, $t \geq 0$, аппроксимирующих управляемых систем, полученных в лемме 6. Оценка $J_N(\mathbf{x}_0, \widehat{\mathbf{u}}_N) - J\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}^0\right)$ связана со специальным выбором управления $\widehat{\mathbf{u}}_N$ и использует утверждение аналогичное лемме 6.

Параграф 3.4 посвящен доказательству следующего утверждения.

Лемма 6 *Если $\Delta \geq 6\tau$, то существуют некоторые постоянные $\widetilde{\omega} > 0$, $\widetilde{K}_2 > 0$, $N_1 \in \mathbb{N}$, что справедливы формулы*

$$\sup_{t \in [0,\Delta]} \left\| \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_N(t) - S_N(t) \right) \right\| = O\left(N^{-\frac{1}{4}} \right), \quad N \to \infty,$$

$$\left\| \widetilde{S}_N^1(t-\Delta) \widetilde{S}_N(\Delta) - \mathbf{P}_N S_N(t) \right\| \leq \widetilde{K}_2 N^{-\frac{1}{4}} e^{-\widetilde{\omega} t}, \quad t \geq \Delta, \quad N \geq N_1.$$

А также доказательству аналогичного утверждения для полугрупп аппроксимирующих управляемых систем, порождаемых управлениями $\mathbf{u}^0$, $\widehat{\mathbf{u}}_N$.

При доказательстве первой части леммы используется утверждение 9. При доказательстве второй части леммы мы модифицировали методику работы[14] в условиях, когда область значений оператора $\widetilde{S}_N(\Delta)$ не принадлежит $\mathcal{D}\left(\mathbf{A}^2\right)$. Реализация предложенного подхода потребовала описания области значений оператора $\widetilde{S}_N(\Delta)$, доказательство равномерной ограниченности семейства операторов $\mathbf{A}_N : \mathbb{W}_2^1([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{H}$ и $R(\lambda, \mathbf{A} - \mathbf{D}\mathbf{\Pi}_N) : \mathbb{H} \to \mathbb{W}_2^1([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$, $N \geq N_0$, $\lambda \in \rho(\mathbf{A})$.

В параграфе 3.5 рассмотрены задачи численного построения приближений с помощью метода усредняющих аппроксимаций для оптимальных стабилизирующих управлений в модели Лотки–Вольтерра с запаздыванием и модели фрезерования.

Публикации по теме диссертации

1. Быков Д.С. Аппроксимация характеристического уравнения в задаче устойчивости вязкоупругого стержня // Тр. 38-й Региональной молодежной конф. "Проблемы теоретической и прикладной математики". Екатеринбург. 2008. С. 102–106.

2. Быков Д.С. Аппроксимация характеристических уравнений дифференциальных систем с последействием с применением определителей возмущения // Тр. 40-й Региональной молодежной конф. "Проблемы теоретической и прикладной математики". Екатеринбург. 2009. С. 116-120.

3. Быков Д.С. Аппроксимирующие характеристические уравнения для систем дифференциальных уравнений с последействием // Международная науч. конф. "Современные проблемы вычислительной математики и математической физики". Москва. 2009. С. 153–154.

4. Быков Д.С. Конечномерные аппроксимации дифференциальных уравнений с запаздыванием в гильбертовом пространстве состояний // Сб. XXV ВВМШ "Современные методы теории краевых задач". Воронеж. 2010. С. 48–49.

5. Быков Д.С., Долгий Ю.Ф. Аппроксимирующие характеристические уравнения для динамической модели вязкоупругого стержня // Матем. и прикл. анализ. Тюмень. 2010. Вып. 4. С. 62–76.

6. Быков Д.С. Оптимальная стабилизация автономных систем с последействием // Тез. докл. XI Международной конф. "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления". Москва. 2010. С. 74–76.

7. Быков Д.С. Оптимальная стабилизация автономных систем с последействием, использующая метод Понтрягина // Тр. 41-й Региональной молодежной конф. "Проблемы теоретической и прикладной математики". Екатеринбург. 2010. С. 325–331.

8. Быков Д.С. Оценка точности усредняющих аппроксимаций в задаче оптимальной стабилизации систем с запаздыванием // Тез. докл. Международ. конф. по математической теории управления и механике. Суздаль. 2011. С. 53–54.

9. Быков Д.С. Приближенный метод нахождения оптимальных стабилизирующих управлений для автономных систем с последействием // Вест. Тамбовского университета. 2011. Т. 16. Вып. 4. С. 1045–1047 (перечень ВАК).

10. Быков Д.С. Стабилизация динамических процессов фрезерования металлов // Тр. 42-й Региональной молодежной конф. "Проблемы теоретической и прикладной математики". Екатеринбург. 2011. С. 17–19.

11. Быков Д.С. Стабилизация равновесных положений в популяционных моделях // Бюл. XIV-й Всероссийской конф. "Математическое программирование и приложения". Екатеринбург. 2011. С. 235–236.

12. Быков Д.С., Долгий Ю.Ф. Аппроксимирующие характеристические уравнения для автономных систем дифференциальных уравнений с последействием // Изв. вузов. Матем. 2011. № 1. С. 18–23 (перечень ВАК).

13. Быков Д.С., Долгий Ю.Ф. Канонические аппроксимации в задаче оптимальной стабилизации автономных систем с последействием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т.17. № 2. С. 20–34 (перечень ВАК).

14. Быков Д.С. Канонические аппроксимации в дифференциальных уравнениях с запаздыванием // Тр. X Междунар. Четаевской конф. 2012. Т. 2. С. 144–153.

15. Быков Д.С. Асимптотическая оценка точности аппроксимаций оптимального стабилизирующего управления системы дифференциальных уравнений с запаздыванием // Деп. в ВИНИТИ 03.05.12. № 206-В1012. 50 с.

16. Быков Д.С., Долгий Ю.Ф. Оценка точности аппроксимаций оптимального стабилизирующего управления системы с запаздыванием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т.18. № 2. С. 38–47 (перечень ВАК).

17. Долгий Ю.Ф., Быков Д.С. Линейные функционально-дифференциальные уравнения в пространстве с неиндефинитной метрикой // Изв. ин-та. матем. и информат. УдГУ. Ижевск. 2012. С. 48–50.

Подписано в печать 9.10.2012 Формат 60x84 1/16
Усл. печ. л. 6,25 Тираж 100 экз. Заказ 3684

Отпечатано в типографии
ООО “Издательство УМЦ УПИ”
г. Екатеринбург, ул. Гагарина, 35 а, оф. 2
Тел.: (343) 362-91-16, 362-91-17

102